# 1. Allgemeine Grundlagen

## 1.1 Rechnen mit reellen Zahlen

### 1.1.1 Potenzen und Wurzeln

Rechenregeln für Potenzen

$$\left.\begin{aligned} & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ & \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n} \\ & a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n \\ & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \qquad (b \neq 0) \end{aligned}\right\} (m,n \in \mathbb{N}; a,b \in \mathbb{R})$$

Rechenregeln für Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} & \sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\ & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[n\cdot m]{a} \\ & \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \\ & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (b > 0) \end{aligned}\right\} (m,n \in \mathbb{N}; a \geq 0, b \geq 0)$$

### 1.1.2 Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen

$$\left.\begin{aligned} & \log_a(u\cdot v) = \log_a u + \log_a v \\ & \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \\ & \log_a\left(u^k\right) = k\cdot\log_a u \\ & \log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\log_a u \end{aligned}\right\} (a > 0, u > 0, v > 0; k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

Umrechnung von der Basis a in die Basis b

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}\cdot\log_a r = K\cdot\log_a r \qquad ;\text{ mit } \quad K = \frac{1}{\log_a b}$$

## 1.2 Vektoroperationen

### 1.2.1 Skalarprodukt (inneres Produkt)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$$

### 1.2.2 Skalarprodukt in der Komponentendarstellung

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$$

### 1.2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreutzprodukt)

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi \qquad A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi \quad (0° \leq \varphi \leq 180°)$$

$$\vec{c}\perp\vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{c}\perp\vec{b} \quad \left(\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{b} = 0\right)$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ : Rechtshändiges System

### 1.2.4 Vektorprodukt in der Komponentendarstellung

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

### 1.2.5 Vektorprodukt in der Determinantenschreibweise

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

## 1.3 Trigonometrische Funktionen

### 1.3.1 Additionstheoreme

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

### 1.3.2 Formeln für halbe Winkel

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

### 1.3.3 Formeln für Winkelvielfache

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1$

### 1.3.4 Formeln für Quadrate

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$

### 1.3.5 Formeln für Produkte

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

## 1.4 Hyperbelfunktionen

### 1.4.1 Definition der Hyperbelfunktionen

$$y = \sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$y = \cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

### 1.4.2 Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

$$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$$

$$\tanh = \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)}$$

### 1.4.3 Additionstheoreme

$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh\beta \pm \cosh\alpha \cdot \sinh\beta$

$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha \cdot \cosh\beta \pm \sinh\alpha \cdot \sinh\beta$

### 1.4.4 Formeln für halbe Winkel

$$\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh\alpha+1}{2}}$$

$$\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh\alpha+1}{2}}$$

### 1.4.5 Formeln für Winkelvielfache

$\sinh(2\alpha) = 2 \cdot \sinh\alpha \cdot \cosh\alpha$

$\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = 2 \cdot \cosh^2(\alpha) - 1$

### 1.4.6 Formeln für Produkte

$$\sinh(\alpha)\cdot\sinh(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cosh(\alpha)\cdot\cosh(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sinh(\alpha)\cdot\cosh(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sinh(\alpha+\beta) + \sinh(\alpha-\beta)\right]$$

### 1.4.7 Formeln von Moivre

$$(\cosh(\alpha) \pm \sinh(\alpha))^n = \cosh(n\alpha) \pm \sinh(n\alpha)$$

## 1.5 Ableitungsregeln

### 1.5.1 Erste Ableitungen elementarer Funktionen

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\sin(n\cdot\alpha)$ | $n\cdot\cos(n\cdot\alpha)$ |
| $\cos(n\cdot\alpha)$ | $-n\cdot\sin(\alpha)$ |
| $\tan(n\cdot\alpha)$ | $\frac{n}{\cos^2(n\cdot\alpha)} = 1+\tan^2(n\cdot\alpha)$ |
| $\tan^{-1}(n\cdot\alpha)$ | $-\frac{n}{\sin^2(n\cdot\alpha)} = -1-(\tan^{-1})^2(n\cdot\alpha)$ |

| | |
|---|---|
| $\ln(x)$ | $1/x$ |
| $e^{nx}$ | $n \cdot e^{nx}$ |

### 1.5.2 Produktregel

$$y = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

### 1.5.3 Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

### 1.5.4 Kettenregel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = F'(u)\cdot u'(x)$$

### 1.5.5 Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x)\cdot g'(y) = 1 \quad \text{oder} \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

## 1.6 Integrationsregeln

### 1.6.1 Partielle Integration

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

# 2. Reihen

## 2.1 Unendliche Reihen

### 2.1.1 Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \qquad \begin{cases} q<0 & \text{Reihe konvergiert} \\ q=0 & \text{keine Aussage möglich} \\ q>0 & \text{Reihe divergiert} \end{cases}$$

### 2.1.2 Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q \qquad \begin{cases} q<0 & \text{Reihe konvergiert} \\ q=0 & \text{keine Aussage möglich} \\ q>0 & \text{Reihe divergiert} \end{cases}$$

### 2.1.3 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - + \ldots \quad (a_i > 0)$$

konvergiert wenn gilt:
$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

### 2.1.4 Spezielle konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q} \quad ;\ \left(|q|<1\right) \text{ geometrische Reihe}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

## 2.2 Potenzreihen

### 2.2.1 Berechnung des Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{oder} \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

## 2.3 Fourier- Reihen

### 2.3.1 Komplexe Darstellung der Fourier- Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt$$

### 2.3.2 Komplexe Darstellung der n- ten Harmonischen

$$f(t) = c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + c_{-n}\cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

### 2.3.3 Berechnung der Fourier- Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt$$

### 2.3.4 Darstellung mit Summenzeichen (n- te Harmonische)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right] \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \; ; \; n = 1,2,3,4,\ldots$$

### 2.3.5 Zusammenhang zwischen den Koeffizienten

reell $\longrightarrow$ komplex

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad ; c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad ; c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

komplex $\longrightarrow$ reell

$$a_0 = 2 \cdot c_0 \quad ; a_n = c_n + c_{-n} \quad ; b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad ; (n \in \mathbb{N}^*)$$

# 3. Lineare Algebra

## 3.1 Reelle Matrizen

### 3.1.1 Spur einer Matrix

$$Sp(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

;Summe aller Hauptdiagonalelemente

### 3.1.2 Matrizenarten

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix (hier untere)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

$A^T = A$ oder $a_{ik} = a_{ki}$

für alle i,k

Schiefsymmetritsche Matrix

$A^T = -A$ oder $a_{ik} = -a_{ki}$

für alle i,k

Orthogonale Matrix

$$A^T = A^{-1}$$

### 3.1.3 Rechenoperationen mit Matrizen

Addition und Subtraktion

$$A \pm B = (a_{ik}) \pm (b_{ik})$$

$$(i = 1,2,3,\ldots,m; \quad k = 1,2,3,\ldots,n)$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ik})$$

$$(\lambda \in \mathbb{R})$$

Multiplikation mit Matrizen

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

### 3.1.4 Inverse Matrix

mit der Unterdeterminanten

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(\det(A) \neq 0)$$

mit Gauß – Jordan Verfahren

$$(A \,|\, E) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

durch elementare Zeilenumformungen zu bringen auf spezielle Form :

$$(A^{-1} \,|\, E) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

## 3.2 Determinanten

### 3.2.1 Zweireihige Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

### 3.2.2 Dreireihige Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

### 3.2.3 Laplacescher Entwicklungssatz

Entwicklung nach den Elementen der i- ten Zeile

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n)$$

Entwicklung nach den Elementen der k- ten Zeile

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1,2,3,\ldots,n)$$

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ (Adjunkte) $\qquad D_{ik} : (n-1)$ - reihige Unterdeterminante non D

## 3.3 Komplexe Matrizen

### 3.3.1 Rechenoperationen und Rechenregeln

Die für reelle Matrizen geltenden Rechenoperationen und Rechenregeln sind sinngemäß auch für komplexe Matrizen gültig.

### 3.3.2 Die konjugiert komplexe Matrix

$$A^* = (a^*_{ik}) = (b_{ik} - j \cdot c_{ik}) = (b_{ik}) - j \cdot (c_{ik}) = B - j \cdot C$$

### 3.3.3 Die transponiert komplexe Matrix

$$A \xrightarrow{\text{Konjugieren}} A^* \xrightarrow{\text{Transponieren}} (A^*)^{\tau} = \overline{A}$$

### 3.3.4 Hermitische Matrix

$$A = (A^*)^{\tau} = \overline{A} \quad \text{oder} \quad a_{ik} = a^*_{ki}$$

### 3.3.5 Unitäre Matrix

$$A \cdot \overline{A} = E$$

## 3.4 Eigenwertprobleme

### 3.4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

$$Ax = \lambda x \quad \text{oder} \quad \underbrace{(A - \lambda E)}_{\text{Charakteristische Matrix von A}} \cdot x = 0$$

n - dimensionales Eigenwertproblem.
$\lambda$: Eigenwert der Matrix A

1. Eigenwerte sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

2. Der zum Eigenwert gehörende Eigenvektor ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i E) x_i = 0$$

# 4. Komplexe Zahlen

## 4.1 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

### 4.1.1 Kartesische Darstellung

$$z = x \pm jy$$

$$j^2 = -1$$

$$x = \mathrm{Re}\{z\} \quad ; \quad y = \mathrm{Im}\{z\}$$

**Polarformen**

$z = |z| \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)]$ ;Trigonometrische Form

$z = |z| \cdot e^{j\varphi}$ ;Exponetialform

$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j \cdot \sin(\varphi)$ ;Eulersche Form

**Kartesische $\longrightarrow$ Polarform**

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}$$

**Polarform $\longrightarrow$ Kartesische Form**

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z|(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

$$= \underbrace{|z| \cdot \cos(\varphi)}_{x} + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin(\varphi)}_{y} = x + j \cdot y$$

### 4.1.2 Grundrechenarten für Komplexe Zahlen

**Addition / Subtraktion**

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

**Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

**Division**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right) \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

# 5. Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehren Variablen

## 5.1 Partielle Differentiation

### 5.1.1 Partielle Differentiation 1. Ordnung

nach x

$$f_x(x;y)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$$

nach y

$$f_y(x;y)=\lim_{\Delta y\to\infty}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$$

### 5.1.2 Partielle Differentiation höherer Ordnung

Herangehensweise

Differenziert man die gegebene Funktion mehrmals nacheinander partiell erhält man partielle Ableitungen höherer Ordnung

Schreibweise

$$f_{xx}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\;;\;f_{xy}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)=\frac{\delta^2 f}{\delta x\cdot\delta y}$$

$$f_{yx}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)=\frac{\delta^2 f}{\delta y\cdot\delta x}\;;\;f_{yy}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)=\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

## 5.2 Mehrfachintegrale

### 5.2.1 Doppelintegrale

in kartesischen Koordinaten

$$\iint_{(A)} f(x;y)dA=\underbrace{\int_{x=a}^{b}\underbrace{\int_{y=f_u(x)}^{f_0(x)} f(x;y)\cdot dy}_{\text{inneresIntegral}}\cdot dx}_{\text{äußeresIntegral}}$$

Vorgehensweise

1. Innere Integration nach y
2. Äußere Integration nach x

Allgemein: Zunächst über die Variable mit veränderlichen Grenzen dann über die mit festen Grenzen integrieren

in Polarkoordinaten

$$\iint_{(A)} f(x;y)dA=\underbrace{\int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\underbrace{\int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r\cdot\cos(\varphi);r\cdot\sin(\varphi))\cdot r\cdot dr}_{\text{inneresIntegral}}\cdot d\varphi}_{\text{äußeresIntegral}}$$

# 6. Differentialgleichungen

## 6.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y'+ay=g(x)$$

### 6.1.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(x)\xrightarrow{\text{durch Trennung der Variablen}}\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

### 6.1.2 Integration der homogenen Differentialgleichung

$$y'+f(x)\cdot y=0\xrightarrow{\text{durch Trennung der Variablen}}y_h=C\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

### 6.1.3 Integration durch Variation der Konstanten

$$y_h=C\cdot e^{-\int f(x)dx}\xrightarrow{\text{durch Variation der Konstanten}}y_h=K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

### 6.1.4 Integration durch Auffinden einer partikulären Lösung

$$y=y_h+y_p=C\cdot e^{-\int f(x)dx}+y_p$$

| Störfunktion | Lösungsansatz |
|---|---|
| 1. Konstante Funktion | $y_p=c_0$ |
| 2. Lineare Funktion | $y_p=c_1x+c_0$ |
| 3. Quadratische Funktion | $y_p=c_2x^2+c_1x+c_0$ |
| 4. Polynomfunktion | $y_p=c_nx^n+\ldots+c_1x+c_0$ |
| 5. Periodische $\sin(\omega t)$ oder $\cos(\omega t)$ Schwingung | $y_p=c_1\cdot\sin(\omega x)+c_2\cdot\cos(\omega x)$ |
| 6. Exponentialfunktion $g(x)=Ae^{bx}$ | $y_p=\begin{cases}c\cdot e^{bx} & \text{für } b\neq -a\\ c\cdot x\cdot e^{bx} & b=-a\end{cases}$ |

## 6.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

$y''+ay'+by=g(x)$

### 6.2.1 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

$W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=y_1\cdot y'_2-y_2\cdot y'_1$ Wronski- Determinante

### 6.2.2 Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ Fundamentalbasis

| $\lambda_1\neq\lambda_2$ (reell) | $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ (reell) | $\lambda_{1/2}=\alpha\pm j\omega$ (konjugiert komplex) |
|---|---|---|
| $y_1=e^{\lambda_1 x}$ ; $y_2=e^{\lambda_2 x}$ | $y_1=e^{\lambda x}$ ; $y_2=x\cdot e^{\lambda x}$ | $y_1=e^{\alpha x}\cdot\sin(\omega x)$ ; $y_2=e^{\alpha x}\cdot\cos(\omega x)$ |
| $y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2\cdot e^{\lambda_2 x}$ | $y=(c_1x+c_2)\cdot e^{\lambda x}$ | $y=e^{\alpha x}\left[c_1\cdot\sin(\omega t)+c_2\cdot\cos(\omega t)\right]$ |

### 6.2.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

| Störfunktion | Störgliedlösungsansatz | |
|---|---|---|
| 1. Polynomfunktion | $y_p=\begin{cases} Q_n(x) & b\neq 0 \\ x\cdot Q_n(x) \quad \text{für} & b\neq 0,\ b\neq 0 \\ x^2\cdot Q_n(x) & a=b=c \end{cases}$ | |
| 2. Exponentialfunktion $g(x)=Ae^{cx}$ | $y_p=A\cdot e^{cx}$ | c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung |
| | $y_p=A\cdot x\cdot e^{cx}$ | c ist eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung |
| | $y_p=A\cdot x^2\cdot e^{cx}$ | c ist eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung |
| 3. Periodische $\sin(\omega t)$ oder $\cos(\omega t)$ Schwingung | $y_p=A\cdot\sin(\beta x)+B\cdot\cos(\beta x)$ | oder $y_p=C\cdot\sin(\beta x+\varphi)$ |

## 6.3 Lösungsansatz mit Hilfe der Laplace- Transformation

### 6.3.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wenn gilt:

$y'(t)+a\cdot y(t)=f(t)$

Anfangswert: $y(0)$

dann ist:

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)+y(0)}{s+a}\right\}$ ;mit $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

### 6.3.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wenn gilt:

$y''(t)+a\cdot y'(t)+b\cdot y(t)=f(t)$

Anfangswerte: $y(0),y'(0)$

dann ist:

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)+y(0)(s+a)+y'(0)}{s^2+a\cdot s+b}\right\}$ ;mit $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

# 7. Laplace- Transformationen

## 7.1 Allgemeine Eigenschaften der Laplace- Transformation

### 7.1.1 Laplace- Integral

$F(s)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt$ ;$\mathrm{Re}\{s\}>0$

### 7.1.2 Linearität

$\mathcal{L}\{C_1\cdot f_1(t)+C_2\cdot f_2(t)+\ldots+C_n\cdot f_n(t)\}=C_1\cdot\mathcal{L}\{f_1(t)\}+C_2\cdot\mathcal{L}\{f_2(t)\}+\ldots+C_n\cdot\mathcal{L}\{f_n(t)\}$

### 7.1.3 Ähnlichkeitssatz

$\mathcal{L}\{f(a\cdot t)\}=\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ ;mit $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$

### 7.1.4 Verschiebungssätze

1. Verschiebung nach rechts

$\mathcal{L}\{f(t-a)\}=e^{-a\cdot s}\cdot F(s)$

2. Verschiebung nach links

$\mathcal{L}\{f(t+a)\}=e^{a\cdot s}\cdot\left[F(s)-\int_0^a f(t)\cdot e^{-st}dt\right]$

### 7.1.5 Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}\left\{e^{-a\cdot t}\cdot f(t-a)\right\}=F(s+a)$$

### 7.1.6 Ableitungssatz für die Originalfunktion

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=s\cdot F(s)-f(0) \quad \text{;mit } f(0) : \text{Anfangswert von } f(x)$$

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\}=s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0)-f'(0) \quad \text{;mit } f(0) \text{ und } f'(0) : \text{Anfangswerte von } f(x)$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n\cdot F(s)-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0) \quad \text{;mit } f(0),\ldots,f^{(n-1)}(0) : \text{Anfangswerte von } f(x)$$

### 7.1.7 Ableitungssatz für die Bildfunktion

$$F'(s)=\mathcal{L}\left\{-t\cdot f(t)\right\}$$

$$F''(s)=\mathcal{L}\left\{(-t)^2\cdot f'(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{t^2\cdot f'(t)\right\}$$

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\left\{(-t)^n\cdot f'(t)\right\}$$

### 7.1.8 Integalsatz für die Originalfunktion

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\cdot F(s) \quad ;0\le\tau\le t$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\cdot\left[F(s)-\int_0^a f(\tau)d\tau\right] \quad ;a\le\tau\le t$$

### 7.1.9 Integralsatz für die Bildfunktion

$$\int_s^\infty F(u)du=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\cdot f(t)\right\}$$

## 7.2 Faltung

### 7.2.1 Faltungsintegral

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

### 7.2.2 Faltungssatz

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right\}=\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}=F_1(s)\cdot F_2(s)$$

## 7.3 Laplace- Transformierte einer periodischen Funktion

### 7.3.1 Definition

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-st}dt \qquad ;T : \text{Periode von } f(t)$$

## 7.4 Laplace- Korrespondenzen

### 7.4.1 Spezielle Laplace- Transformationen

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\delta(t)$ Dirac-Impuls | $\frac{1}{s}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\varepsilon(t)=\begin{Bmatrix}0 \text{ für } t<0\\1 \text{ für } t>0\end{Bmatrix}$ Sprungfunktion | $\frac{s^2}{(s-a)^3}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\left(\frac{1}{2}a^2t^2+2at+1\right)e^{at}$ |
| $\frac{1}{s-a}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $e^{at}$ | $\frac{1}{s-\ln\lvert a\rvert}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $a^t$, Re $a>0$ | $\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{be_{at}-ae_{bt}+a-b}{ab(a-b)}$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $t$ | $\frac{1}{s(s-a)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$ | $\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ $a\neq b, b\neq c, c\neq a$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{(c-b)e^{at}+(a-c)e^{bt}+(b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ |
| $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$;$a\neq b$ | $\frac{1}{s^2-a^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{1}{a}\sinh(at)$ | $\frac{(s-a)(s-b)}{s(s+a)(s+b)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $1+2\frac{a+b}{a-b}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$ |
| $\frac{1}{s^2+a^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{1}{a}\sin(at)$ | $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $t\cdot e^{at}$ | $\frac{1}{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{b\cdot\sinh(at)-a\cdot\sinh(bt)}{ab\left(a^2-b^2\right)}$ |
| $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{be^{bt}\text{-}ae^{at}}{b\text{-}a}$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\cosh(at)$ | $\frac{s}{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{\cosh(bt)-\cosh(at)}{b^2-a^2}$ |
| $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\cos(at)$ | $\frac{s}{(s-a)^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $(1+at)e^{at}$ | $\frac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{a\cdot\sinh(at)-b\cdot\sinh(bt)}{a^2-b^2}$ |
| $\frac{a}{a^2+(s-b)^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $e^{bt}\sin(at)$ | $\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $e^{bt}\sinh(at)$ | $\frac{s^3}{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)}$ | $\bullet\!-\!\circ$ | $\frac{a^2\cosh(at)-b^2\cosh(bt)}{a^2-b^2}$ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $e^{bt}\cos(at)$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $e^{bt}\cosh(at)$ | $\frac{1}{\left(s^2-a^2\right)^2}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{t\cdot\cosh(at)}{2a^2}-\frac{\sinh(at)}{2a^3}$ |
| $\frac{1}{s^3}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{1}{2}t^2$ | $\frac{1}{s^2(s-a)}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{1}{a^2}\left(e^{at}-at-1\right)$ | $\frac{a^2 s}{s^4+a^4}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$ |
| $\frac{1}{s(s-a)^2}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{(at-1)e^{at}+1}{a^2}$ | $\frac{1}{(s-a)^3}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{t^2}{2}e^{at}$ | $\frac{s^3}{s^4+a^4}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)\cdot\cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$ |
| $\frac{1}{(s-a)^3}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{t^2}{2}e^{at}$ | $\frac{(s-a)^2}{s\left(s^2+a^2\right)}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $1-2\sin(at)$ | $\frac{s^2-2a^2}{s^4+4a^4}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{\cos(at)\sinh(at)}{a}$ |
| $\frac{s^2 2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\cosh^2(at)$ | $\frac{s^2+2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\cos^2(at)$ | $\frac{s}{\left(s^2-a^2\right)^3}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{t^2\cosh(at)}{8a^2}-\frac{t\cdot\sinh(at)}{8a^3}$ |
| $\frac{1}{s\left(s^2+4a^2\right)}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{\sin^2(at)}{2a^2}$ | $\frac{s}{(s-a)^3}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\left(\frac{1}{2}at^2+t\right)e^{at}$ | $\frac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^3}$ | $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $\frac{t\cdot\cosh(at)}{8a^2}-\frac{\left(1-a^2t^2\right)}{8a^3}\sinh(at)$ |