

# 1. Signale und Systeme

## 1.1 Grundlegende Eigenschaften

### 1.1.1 Zeit-Skalierung

CT

$$x(b \cdot t) \Rightarrow \begin{cases} b < 1 & \text{Dehnung} \\ b > 1 & \text{Stauchung} \end{cases}$$



DT

$$x[n \cdot b \cdot T] \Rightarrow \begin{cases} b < 1 & \text{Dehnung} \\ b > 1 & \text{Stauchung} \end{cases} \text{Zeitkonstant}$$



### 1.1.2 Zeitumkehr und Spiegelung



$t \rightarrow -t$



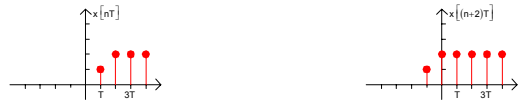
$n \rightarrow -n$

### 1.1.3 Zeitverschiebung

$$x(t - t_1) \Rightarrow \begin{cases} t_1 < 0 & \text{vorausseilend} \\ t_1 > 0 & \text{verzögert} \end{cases}$$



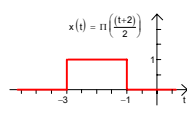
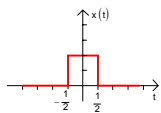
$$x[(n - n_1)T] \Rightarrow \begin{cases} n_1 < 0 & \text{vorausseilend} \\ n_1 > 0 & \text{verzögert} \end{cases}$$



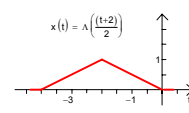
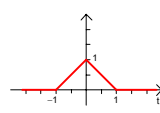
Die Reihenfolge ist von Bedeutung wenn eine Zeitverschiebung beteiligt ist!

## 1.2 Rechteckfunktionen und Rampen

### 1.2.1 Rechteckfunktionen



### 1.2.2 Dreieckfunktionen



## 1.3 Signalenergie und Signalleistung

### 1.3.1 Signalenergie

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Signalenergie eines Signals  $x(t)$

### 1.3.2 Signalleistung

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Signalleistung eines Signals  $x(t)$

### 1.3.3 Energiesignal

$$0 < E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$$

Energiesignal  $\hat{=}$  Signal mit endlicher Signalenergie  
Typ: einmalige kurzzeitige Signale

### 1.3.4 Leistungssignale

$$0 < P_x < \infty \Rightarrow E_x = \infty$$

Leistungssignal  $\hat{=}$  Signal mit endlicher Signalleistung  
Typ: ausgedehnte Signale insbesondere periodische Signale

### 1.3.5 Weder Leistungs- noch Energiesignale

Es gibt Signale, die weder Leistungs- noch Energiesignale sind. Z.B. die Rampe  $r(t)$

Für periodische Signale gilt dann: 
$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|^2 dt$$

## 2. Laplace Transformation

### 2.1 Definition der Laplace Transformation

#### 2.1.1 Doppelseitige Laplace Transformation

$$X_D(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Hintransformation

$$x_D(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_D(s) \cdot e^{st} dt$$

Rücktransformation

$\sigma$  ist ein beliebiger Wert im Konvergenzbereich

#### 2.1.2 Einseitige Laplace Transformation

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Hintransformation

$$x(t) = \begin{cases} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} dt & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Rücktransformation

$\sigma$  ist ein beliebiger Wert im Konvergenzbereich

## 2.2 Laplace Korrespondenzen und Rechenregeln

### 2.2.1 Laplace Korrespondenzen

1	 $\delta(t)$ Dirac-Impuls	$\frac{1}{s}$	 $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$ Sprungfunktion	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	 $\left(\frac{1}{2}a^2t^2 + 2at + 1\right)e^{at}$
$\frac{1}{s-a}$	 $e^{at}$	$\frac{1}{s-\ln a }$	 $a^t, \text{ Re } a > 0$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	 $\frac{be^{-at} - ae^{-bt} + a - b}{ab(a-b)}$
$\frac{1}{s^2}$	 $t$	$\frac{1}{s(s-a)}$	 $\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	 $\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	 $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}; a \neq b$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	 $\frac{1}{a} \sinh(at)$	$\frac{(s-a)(s-b)}{s(s+a)(s+b)}$	 $1 + 2 \frac{a+b}{a-b} (e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	 $\frac{1}{s} \sin(at)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	 $t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	 $\frac{b \cdot \sinh(at) - a \cdot \sinh(bt)}{ab(a^2 - b^2)}$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	 $\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	 $\cosh(at)$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	 $\frac{\cosh(bt) - \cosh(at)}{b^2 - a^2}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	 $\cos(at)$	$\frac{s}{(s-a)^2}$	 $(1+at)e^{at}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	 $\frac{a \cdot \sinh(at) - b \cdot \sinh(bt)}{a^2 - b^2}$
$\frac{a}{a^2 + (s-b)^2}$	 $e^{bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$	 $e^{bt} \sinh(at)$	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	 $\frac{a^2 \cosh(at) - b^2 \cosh(bt)}{a^2 - b^2}$
$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	 $e^{bt} \cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	 $e^{bt} \cosh(at)$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	 $\frac{t \cdot \cosh(at)}{2a^2} - \frac{\sinh(at)}{2a^3}$
$\frac{1}{s^3}$	 $\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	 $\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$	$\frac{a^2s}{s^4 + a^4}$	 $\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{1}{s(s-a)^2}$	 $\frac{(at-1)e^{at} + 1}{a^2}$	$\frac{1}{(s-a)^3}$	 $\frac{t^2}{2}e^{at}$	$\frac{s^3}{s^4 + a^4}$	 $\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{1}{(s-a)^3}$	 $\frac{t^2}{2}e^{at}$	$\frac{(s-a)^2}{s(s^2 + a^2)}$	 $1 - 2 \sin(at)$	$\frac{s^2 - 2a^2}{s^4 + 4a^4}$	 $\frac{\cos(at) \sinh(at)}{a}$
$\frac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$	 $\cosh^2(at)$	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	 $\cos^2(at)$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$	 $\frac{t^2 \cosh(at)}{8a^2} - \frac{t \sinh(at)}{8a^3}$
$\frac{1}{s(s^2 + 4a^2)}$	 $\frac{\sin^2(at)}{2a^2}$	$\frac{s}{(s-a)^3}$	 $\left(\frac{1}{2}at^2 + t\right)e^{at}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	 $\frac{t \cosh(at)}{8a^2} - \frac{(1 - a^2t^2) \sinh(at)}{8a^3}$

2.2.2 Laplace Rechenregeln

1 Lineare Übertragung

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \quad \longleftrightarrow \quad a \cdot X(s) + b \cdot Y(s) \quad ; a, b \in \mathbb{R}$$

2 Zeitverschiebung

$$x(t - t_0) \quad \longleftrightarrow \quad X(s) \cdot e^{-s \cdot t_0}$$

3 Ähnlichkeitssatz

$$x(m \cdot t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{m} \cdot X\left(\frac{s}{m}\right)$$

4 Frequenzverschiebung

$$x(t) \cdot e^{-a \cdot t} \quad \longleftrightarrow \quad X(s + a)$$

5 Multiplikation mit t

$$t \cdot x(t) \quad \longleftrightarrow \quad -\frac{d \cdot X(s)}{ds}$$

6 Differenzieren nach t

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad s \cdot X(s) - \underbrace{x(t=0^-)}_{\text{Anfangsbedingung}} \quad \text{Anfangsbedingung nur bei Signalen die vor dem Nulldurchgang nicht Null sind!}$$

7 Integration über die Zeit t

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot d\tau \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

8 Faltung

$$x(t) * y(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(s) \cdot X(s)$$

9 Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} X(s) \cdot s \quad \text{Anfangswertsatz}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s) \cdot s \quad \text{Endwertsatz}$$

2.2.3 Laplace Rücktransformation

Ziel: Berechnung des inversen Laplaceintegrals vermeiden

In vielen Fällen ergibt sich:

$$\left. \begin{matrix} X(s) \\ H(s) \end{matrix} \right\} \text{ eine echt gebrochen rationale Funktion}$$

dann ist auch Y(s) eine echt gebrochen rationale Funktion

Dann ergibt sich folgende allgemeine Darstellung:

$$X(s) = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_1 s^1 + p_0}{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_1 s^1 + q_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

für alle reale Systeme / Signale sind alle p<sub>i</sub>, q<sub>i</sub> reelle Zahlen

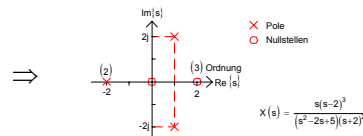
X(s) kann in Nenner und Zähler faktorisiert werden:

$$X(s) = \frac{p_m (s - \beta_1) (s - \beta_2) \dots (s - \beta_m)}{q_n (s - \gamma_1) (s - \gamma_2) \dots (s - \gamma_n)} \quad ; \beta : \text{Nullstellen}, \gamma : \text{Polstellen}$$

- { β<sub>i</sub> (γ<sub>i</sub>) können gleich sein ⇒ Ordnung dieser Nullstellen (Polstellen) > 1
- { β<sub>i</sub> (γ<sub>i</sub>) können Null sein ⇒ Nullstelle (Polstelle) im Nullpunkt
- { β<sub>i</sub> (γ<sub>i</sub>) können komplex sein ⇒ dann treten sie immer paarweise konj. komplex auf

X(s), und damit auch x(t), ist eindeutig beschrieben durch:

- { die Lage aller Pole
- { die Lage aller Nullstellen
- { einen Faktor p<sub>m</sub> / q<sub>n</sub>



Nutzen der Faktorisierung (des Nenners):

Zerlegen der gebrochen rationalen Funktionen in eine Summe einfacher gebrochen rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung

sind dann ggf. in Tabellen zur Laplace Transformation enthalten (siehe oben)

Ansatz für Exponential-Anteile im Zähler von X(s):

$$X(s) = \frac{p_0(s) e^{-st_0} + p_1(s) e^{-st_1} + \dots}{Q(s)} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{p_0(s)}{Q(s)} e^{-st_0} + \frac{p_1(s)}{Q(s)} e^{-st_1} + \dots$$

Z<sub>0</sub>(t)                      Z<sub>0</sub>(t - t<sub>0</sub>)

2.2.4 Laplace Transformation linearer DGL

Bestimmen von H(s) aus der Systemgleichung

Allgemein: DGL eines LTI - Systems (alle x, y, sind Zeitabhängig)

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{Linearität}} s \cdot x(s)$

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \dots + b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

Koeffizienten im Zähler und Nennerpolynom sind für reale Systeme reell:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

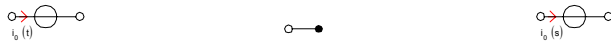
Für Standardform: durch  $a_0$  dividieren. Koeffizient bei  $s^0$  ist 1.

2.2.5 Laplace Transformation & elektrische Netzwerke

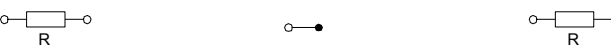
Spannungsquelle



Stromquelle

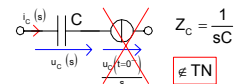


Ohmscher Widerstand



Kapazität

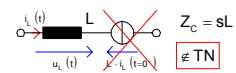
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{0^-}^t i_c(\tau) d\tau + \underbrace{u_c(t=0^-)}_{\notin \text{TN}}$$



$$u_c(s) = \frac{1}{sC} \cdot i_c(s) + \frac{u_c(t=0^-)}{s}$$

Induktivität

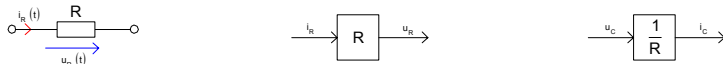
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{Dt}$$



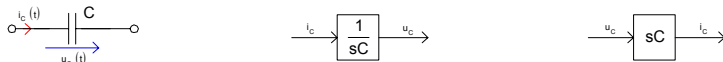
$$u_L(s) = s \cdot L \cdot i_L(s) - L \cdot i_L(t=0^-)$$

2.2.6 Überführen des Netzwerkes in ein Blockdiagramm

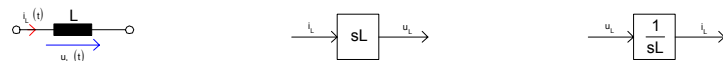
Ohmscher Widerstand



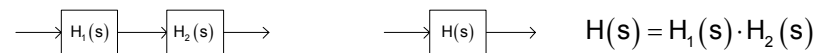
Kapazität



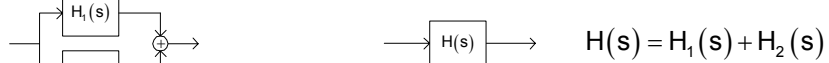
Induktivität



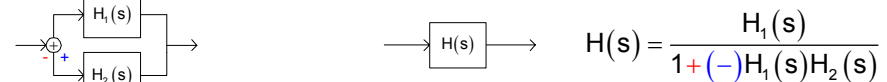
Reihenschaltung



Parallelschaltung



Rückkopplung



Abzweig verschieben



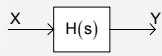
Sammelpunkt verschieben



Abzweigungen und Summenpunkte dürfen NICHT einfach vertauscht werden!!!

## 2.3 Übertragungsfunktionen

### 2.3.1 Begriffe



Die Systemantwort  $y(t)$  heißt  $\begin{cases} \text{zero - state response} & \text{für Anfangsbedingung} = 0 \\ \text{zero - input response} & \text{für Anfangsbedingung} \neq 0 \end{cases}$

Im Fall  $x(t) = \delta(t) \iff X(s) = 1 \implies Y(s) = H(s) \iff y(t) = h(t)$  ist  $h(t)$  die Gewichtsfunktion (Antwort auf Dirac-Stoß (impuls response))

$H(s)$  ist häufig gebrochen rationale Funktion und kann eindeutig durch Null- und Polstellen beschrieben werden

### 2.3.2 Stabilität

Ob ein System stabil ist lässt sich anhand von  $H(s)$  einfach bestimmen

Polbetrachtung im p-n-Schema

- System ist stabil, wenn alle Pole von  $H(s)$  in der linken  $s$  – Halbebene liegen
- System ist Grenzstabil, wenn  $H(s)$  nur Pole in der linken  $s$  – Halbebene und einfache Pole auf der imaginären Achse hat
- Systeme ist instabil, wenn  $H(s)$  Pole in der rechten  $s$  – Halbebene oder mehrfache Pole auf der imaginären Achse

Hurwitzkriterium

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Sei  $a_0 > 0$  (wenn nicht mit (-1) multiplizieren), dann ist das System stabil wenn:

- alle  $a_i > 0$
- alle  $D_i > 0$

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, kann man keine Aussage machen!

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_0 & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_1 & \vdots \\ \vdots & a_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

$D_{n-1} \quad D_{n-2} \quad D_2 \quad D_1$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

## 3. Analyse von CT – Systemen

### 3.1 Im Zeitbereich

#### 3.1.1 Lösung der Systemgleichungen



Gegeben:  $\begin{cases} x(t) \text{ Input - Signal } x(t) = 0 \text{ für } t < 0 \\ \text{LTI - System (Systemgleichung)} \end{cases}$

Gesucht:  $y(t)$  Output – Signal

Lösungsmöglichkeiten:

- homogene / partikuläre Lösungen
- Laplace – Transformation
- Lösungsmethode im Zeitbereich durch Faltung (hier beschrieben) keine Beschränkung mehr auf  $x(t) = 0$  für  $t < 0$

#### 3.1.2 Die Gewichtsfunktion eines Systems



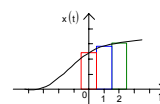
- ist das Input – Signal der Dirac-Stoß dann heißt das Output – Signal Einheitsstoßantwort
- $h(t)$  mit Laplace Fall  $x(t) = \delta(t) \iff X(s) = 1 \implies Y(s) = H(s) \iff y(t) = h(t)$
- Alternative für die Praxis: setze  $x_1(t) = u(t)$ , messe  $y(t)$ , bilde  $h(t) = dy(t)/dt$

#### 3.1.3 Überlagerungsintegral

Bedeutung:

$$\tilde{y}(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta\tau) \cdot y_r(t - n \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \quad ; \text{ Näherung}$$

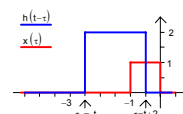
$$\tilde{y}(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta\tau) \cdot y_r(t - n \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \quad ; \text{ Verbesserung der Näherung}$$



$$\begin{aligned} & x(n \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot x_r(t - n \cdot \Delta\tau) \quad |_{n=0} \\ & x(n \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot x_r(t - n \cdot \Delta\tau) \quad |_{n=1} \\ & x(n \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot x_r(t - n \cdot \Delta\tau) \quad |_{n=2} \end{aligned}$$

Faltungsintegral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$



Eigenschaften der Faltung

- Faltung ist kommutativ
- Faltung ist assoziativ
- Faltung ist distributiv

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$x(t) * [g(t) * h(t)] = [x(t) * g(t)] * h(t)$$

$$x(t) * [g(t) + h(t)] = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$$

weiter Eigenschaften der Faltung	<p>4 Dirac ist neutrales Element der Faltung <math>x(t) * \delta(t) = x(t)</math></p> <p>5 verschobener Dirac verschiebt das Signal <math>x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)</math></p> <p>6 Aussagen über die Breite von <math>x(t) * h(t) = y(t)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ linker Rand von <math>y(t)</math> = linker Rand von <math>x(t)</math> + rechter Rand von <math>h(t)</math></li> <li>▪ rechter Rand von <math>y(t)</math> = rechter Rand von <math>x(t)</math> + linker Rand von <math>h(t)</math></li> <li>▪ Breite von <math>y(t)</math> = Breite von <math>x(t)</math> + Breite von <math>h(t)</math></li> </ul>
----------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3.2 Im Frequenzbereich

3.2.1 Spektren

Spektren	Graphische Darstellung der Amplitude und der Phase über der Frequenz	⇒ Amplitudenspektrum $A(f)$ ⇒ Phasenspektrum $\Theta(f)$
----------	----------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------

3.2.2 Bestimmung der Leistung eines Signals aus dessen Spektrum

Einseitiges Spektrum	$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  X_n ^2 = X_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot  X_n ^2$ <p>Quadrat des doppel-seitigen Amplitudenspektrums</p> <p>Hälfte der Quadrate des einseitigen Amplitudenspektrums</p>	<p>Beispiel 1</p> <p>Beispiel 2</p>	$P_x = \frac{1}{2} [(2)^2 + (4)^2 + (6)^2] = 28$ $P_x = (3)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = 28$
----------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3.2.3 Bandbreiten

3dB - Bandbreite	$ H_{3dB}(f_g)  = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot  H(f) _{max}$	
------------------	----------------------------------------------------------	--

3.3 Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektrum

3.3.1 Autokorrelationsfunktion

Energiesignale	$\Phi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot x(t + \tau) \cdot d\tau$	Anmerkung: Autokorrelation ist eine Kreuzkorrelation mit $y(t) = x(t)$
Energie des Signals	$\Phi_x(t=0) = E_x \Rightarrow \Phi_x(t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(\tau) \cdot d\tau$	
Energiedichtespektrum	$\Phi_x(t) \quad \circ \rightarrow \quad G_x(f) =  X(f) ^2$	
Leistungssignale	$R_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(\tau) \cdot x(t + \tau) \cdot d\tau$	Anmerkung: Autokorrelation ist eine Kreuzkorrelation mit $y(t) = x(t)$
Leistung des Signals	$R_x(t=0) = P_x \Rightarrow R_x(t=0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty}  x(\tau) ^2 \cdot d\tau$	
Leistungsdichtespektrum	$R_x(t) \quad \circ \rightarrow \quad S_x(f)$	
Allgemeines	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Die AKF hat ihr Maximum stets bei <math>t = 0</math></li> <li>▪ Die AKF ist eine gerade Funktion</li> </ul>	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) \cdot df \quad P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \cdot df$

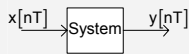
3.3.2 Kreuzkorrelationsfunktionen

Energiesignale	$\Phi_{x,y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t + \tau) \cdot d\tau$	Wie Faltung mit gespiegeltem Eingangssignal $y(t)$ wird <b>nicht</b> gespiegelt
Leistungssignale	$R_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(\tau) \cdot x(t + \tau) \cdot d\tau$	
Allgemeines	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Die KKF hat ihr Maximum für diejenige zeitliche Verschiebung bei der die beiden Signale am ähnlichsten sind</li> </ul>	

## 4. Analyse von DT – Systemen

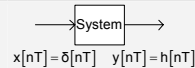
### 4.1 Im Zeitbereich

#### 4.1.1 Lösung der Systemgleichungen



- Mathematische Lösung der Differentialgleichung (≠ TN)
- Rekursive numerische Methode
  - kann Anfangswerte berücksichtigen
  - liefert nur numerische Werte für eine beschränkte Anzahl von Stützstellen
- Anwendung der Superposition ⇒ diskrete Faltung
  - berücksichtigt keine Anfangswerte

#### 4.1.2 Die Gewichtsfunktion eines Systems



- Ist das Input – Signal der Dirac-Stoß dann heißt das Output – Signal Einheitsstoßantwort
- Bestimmung von  $h[nT]$  durch Z – Transformation

#### 4.1.3 Zeitdiskrete Faltung

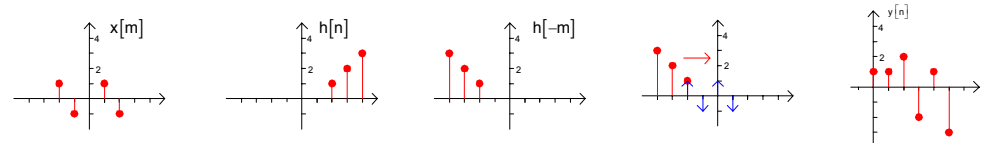
Definition der DT – Faltung

$$y[nT] = x[nT] * h[nT] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[nT] \cdot h[(n-m)T]$$

Lösungs-  
methode

- 1 Skizze und mathematische Beschreibung von  $x[n]$  und  $h[n]$
- 2 Skizze und mathematische Beschreibung von  $x[m]$ 
  - spiegeln von  $h[m] \rightarrow h[-m]$
- 3 Verschiebung von  $h[-m]$  nach rechts ( $m \rightarrow m-n$ )
- 4 Skizze von  $h[n-m]$

Beispiel



### 4.2 Im Frequenzbereich

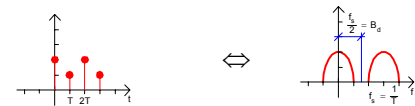
#### 4.2.1 Abtastfrequenz und Bandbreite

Abtastfrequenz  $f_s = \frac{1}{T}$  ; mit T : Periodendauer

$$x[nT] \Leftrightarrow X(f)$$

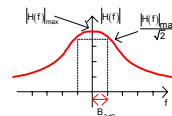
Bandbreite Abstand zwischen kleinster und größter

Frequenz im Bereich  $0 \leq f < \frac{f_s}{2}$



3dB- Bandbreite

$$|H_{3dB}(f_g)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |H(f)|_{\text{max}}$$



## 5. Die Fourier Transformation

### 5.1 Die Fourier Transformation für aperiodische Signale (Energiesignale)

#### 5.1.1 Grundsätzliches

**Periodische Signale**

- können durch eine Fourier – Reihe exakt beschrieben werden. Das Spektrum beschreibt das Signal exakt.

**Aperiodische Signale**

- können in einem Intervall durch eine Fourier – Reihe exakt beschrieben werden. Außerhalb des Intervalls wird periodisch ergänzt. Das Spektrum beschreibt das Signal nicht exakt.

#### 5.1.2 Definition

Fourier –  
Transformation

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

$X(f)$  kann in Phase und Amplitude zerlegt werden:

$$X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\angle X(f)}$$

Fourier – Rück-  
Transformation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df$$

$|X(f)|$  : Amplituden- (Dichte-) Spektrum  $[[x(t)]s]$

$e^{j\angle X(f)}$  : Phasenspektrum [radian]

- Gelegentlich findet man  $X(\omega)$  statt  $X(f)$ , mit  $\omega = 2\pi \cdot f$  dann ist  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega \cdot t} d\omega$

## 5.2 Die Fourier Transformation für periodische Signale (Leistungssignale) und andere singuläre Signale

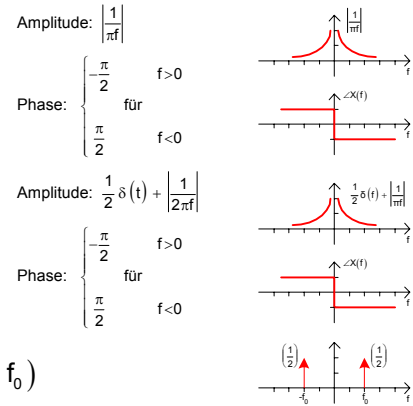
### 5.2.1 Zusammenstellung einiger Signaltransformationen

- 1  $x(t) = A$   $\longleftrightarrow$   $X(f) = A \cdot \delta(f)$
- 2  $x(t) = A \cdot \delta(t)$   $\longleftrightarrow$   $X(f) = A$
- 3  $x(t) = A \cdot \delta(t - t_0)$   $\longleftrightarrow$   $X(f) = A \cdot e^{-j2\pi f t_0}$

4  $x(t) = \text{sgn}(t) \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$   $\longleftrightarrow$   $X(f) = \frac{1}{j\pi f} = -j \frac{1}{\pi f}$

5  $x(t) = u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$   $\longleftrightarrow$   $X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

6  $x(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$   $\longleftrightarrow$   $X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$



## 5.3 Rechenregeln und Korrespondenzen zur Fourier – Transformation

### 5.3.1 Korrespondenzen zur Fourier – Transformation

$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\longleftrightarrow$	$\tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$	$e^{-a^2 t^2}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{(\pi f)^2}{a^2}}$
$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\longleftrightarrow$	$\tau \cdot \text{sinc}^2(\tau f)$	1	$\longleftrightarrow$	$\delta(f)$
$\text{sinc}(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{f}{a}\right)$ ; $a > 0$	$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1
$e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$ ; $a > 0$	$\text{sgn}(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\pi f}$
$t \cdot e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$ ; $a > 0$	$u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$e^{-a t } u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2a}{a^2 + (j2\pi f)^2}$ ; $a > 0$	$\cos(2\pi f_0 t + \theta)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2} e^{j\theta} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\theta} \delta(f + f_0)$

### 5.3.2 Rechenregeln zur Fourier – Transformation

$\Rightarrow$ <b>Linearität</b>	$a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$ $\longleftrightarrow$ $a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$	$\Rightarrow$ <b>Frequenzverschiebung</b>	$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$ $\longleftrightarrow$ $X(f - f_0)$
$\Rightarrow$ <b>Skalierung</b>	$x(at)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\Rightarrow$ <b>Modulation</b>	$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot X(f + f_0)$
$\Rightarrow$ <b>Zeitumkehr / Spiegelung</b>	$x(-t)$ $\longleftrightarrow$ $X(-f)$	$\Rightarrow$ <b>Differenzieren im Zeitbereich</b>	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$ $\longleftrightarrow$ $(j2\pi f)^n \cdot X(f)$
$\Rightarrow$ <b>Komplexe Konjugation</b>	$x^*(t)$ $\longleftrightarrow$ $X^*(-f)$	$\Rightarrow$ <b>Integrieren im Zeitbereich</b>	$\int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$ $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \cdot \delta(f)$
$\Rightarrow$ <b>Dualität</b>	$x(t)$ $\longleftrightarrow$ $X(f)$	$\Rightarrow$ <b>Faltung</b>	$x(t) * y(t)$ $\longleftrightarrow$ $X(f) \cdot Y(f)$
$\Rightarrow$ <b>Zeitverschiebung</b>	$x(t - t_0)$ $\longleftrightarrow$ $X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$	$\Rightarrow$ <b>Multiplikation</b>	$x(t) \cdot y(t)$ $\longleftrightarrow$ $X(f) * Y(f)$

### 5.3.3 Eigenschaften der Fourier – Transformation

- $\Rightarrow$  Ein Signal ist **zeitbegrenzt**, wenn es nur in einem endlichen Zeitintervall ungleich Null ist.
- $\Rightarrow$  Ein Signal heißt **bandbegrenzt**, wenn es nur in einem endlichen Frequenzintervall ungleich Null ist.
- $\Rightarrow$  Ein **zeitbegrenztes** Signal kann **nicht bandbegrenzt** sein.
- $\Rightarrow$  Ein **bandbegrenztes** Signal kann **nicht zeitbegrenzt** sein.
- $\Rightarrow$  Wenn das Spektrum eines Signals abgeschnitten wird, zeigt die Fourier – Rücktransformierte an jeder Sprungstelle das Gibb's Phänomen (Überschwingen von ca. 9%).
- $\Rightarrow$  Wenn ein Signal  $x(t)$  **reell** und **gerade** ist, dann ist  $X(f)$  ebenfalls **reell** und **gerade**.
- $\Rightarrow$  Wenn ein Signal  $x(t)$  **reell** und **ungerade** ist, dann ist  $X(f)$  **imaginär** und **ungerade**.
- $\Rightarrow$  Ein **reelles** Signal hat ein **gerades Amplitudenspektrum** und ein **ungerades Phasenspektrum**

## 6. DT – Fourier Transformation (DTFT)

### 6.1 Allgemein

#### 6.1.1 Definitionen

Definition der DTFT

$$X_d(f) = f_s \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(nT - m \cdot f_s)$$

Rücktransformation

$$x[nT] = \frac{1}{f_s} \cdot \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} X_d(f) \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot f \cdot T} df$$

#### 6.1.2 Energiedichtespektrum

Energie des Signals

$$E_{dx} = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[nT]|^2$$

Energiedichtespektrum

$$G_{dx} = T^2 \cdot |X_d(f)|^2$$

### 6.2 Rechenregeln und Korrespondenzen

#### 6.2.1 Korrespondenzen der DTFT

A	↔	$A \cdot \delta(f)$	$e^{-an} \cdot u[nT]$	↔	$\frac{1}{1 - e^{-a - j2\pi f T}} ; a > 0$
$u[nT]$	↔	$\frac{1}{1 - e^{-j2\pi f T}} + \frac{f_s}{2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m \cdot f_s)$	$a^{ n }$	↔	$u \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(2\pi f T) + a^2} ;  a  < 1$
$\cos(2\pi n f_0 T + \theta)$	↔	$\frac{f_s}{2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} [e^{j\theta} \delta(f - f_0 - m \cdot f_s) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0 - m \cdot f_s)]$	$e^{-a n }$	↔	$\frac{1 - e^{-2a}}{1 - 2e^{-a} \cos(2\pi f T)}$
$\delta[nT]$	↔	1	$\text{sign}[nT] = -1 + 2 \cdot u[nT]$	↔	$\frac{2}{1 - e^{-j2\pi f T}}$
1	↔	$f_s \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m \cdot f_s)$	$a^n \cdot u[nT]$	↔	$\frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f T}} ; \text{für }  a  < 1$

#### 6.2.2 Rechenregeln

##### ↪ Linearität

$$a \cdot x[nT] + b \cdot y[nT] \quad \leftrightarrow \quad a \cdot X_d(f) + b \cdot Y_d(f)$$

##### ↪ Modulation

$$x[nT] \cdot \cos(2\pi n f_0 T) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot X_d(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot X_d(f + f_0)$$

##### ↪ Differenzieren im Zeitbereich

$$x[nT] - x[(n-1)T] \quad \leftrightarrow \quad (1 - e^{-j2\pi f T}) \cdot X_d(f)$$

##### ↪ Summation

$$\sum_{i=-\infty}^n x[iT] \quad \leftrightarrow \quad \frac{X_d(f)}{1 - e^{-j2\pi f T}} + \frac{f_s \cdot X_d(0)}{2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m \cdot f_s)$$

##### ↪ Multiplikation

$$x[nT] \cdot y[nT] \quad \leftrightarrow \quad x[nT] \cdot \frac{1}{f_s} \cdot \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} X_d(\alpha) \cdot Y(f - \alpha) d\alpha$$

##### ↪ Skalierung

$$x\left[\frac{nT}{a}\right] \quad \leftrightarrow \quad X_d\left(\frac{f}{a}\right)$$

##### ↪ Zeitumkehr

$$x[-nT] \quad \leftrightarrow \quad X_d(-f)$$

##### ↪ Komplexe Konjunktion

$$x^*[nT] \quad \leftrightarrow \quad X_d^*(-f)$$

##### ↪ Zeitverschiebung

$$x[(n-n_1)T] \quad \leftrightarrow \quad X_d(f) \cdot e^{-j2\pi f n_1 T}$$

##### ↪ Frequenzverschiebung

$$x[nT] \cdot e^{j2\pi f_0 T} \quad \leftrightarrow \quad X_d(f - f_0)$$

#### 6.2.3 Eigenschaften des Spektrums

- ↪  $x[nT]$ : reell, gerade  $\Rightarrow X_d(f)$ : reell, gerade
- ↪  $x[nT]$ : reell, ungerade  $\Rightarrow X_d(f)$ : imaginär, ungerade
- ↪  $x[nT]$ : reell  $\Rightarrow X_d(f)$ :  $\begin{cases} \text{gerader Realteil} \\ \text{ungerader Imaginärteil} \end{cases}$  oder  $\begin{cases} \text{gerader Betrag} \\ \text{ungerade Phase} \end{cases}$

## 7. Z – Transformation

### 7.1 Allgemein

#### 7.1.1 Eigenschaften

- ↪ Z – Transformation ist die Laplace – Transformation der DT – Signale
- ↪ Nutzen der DTFT ist die Beschreibung von Systemen und Signalen im Frequenzbereich
- ↪ Nachteil der DTFT ist die aufwendig durchzuführende Rücktransformation

#### 7.1.2 Definition

Einseitige

$$X_d(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \cdot Z^{-n}$$

Beidseitige

$$X_d(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \cdot Z^{-n}$$

## 7.2 Rechenregeln und Korrespondenzen der Z – Transformation

### 7.2.1 Korrespondenzen

$\delta[nT]$	$\longleftrightarrow$	1	$\cos(b \cdot n) \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1-Z^{-1} \cdot \cos(b)}{1-2Z^{-1} \cdot \cos(b)+Z^{-2}}$
$u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-Z^{-1}}$	$\sin(b \cdot n) \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{Z^{-1} \cdot \sin(b)}{1-2Z^{-1} \cdot \cos(b)+Z^{-2}}$
$a^n \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-aZ^{-1}}$	$a^n \cdot \cos(b \cdot n) \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1-aZ^{-1} \cdot \cos(b)}{1-2aZ^{-1} \cdot \cos(b)+a^2 \cdot Z^{-2}}$
$r[nT] = n \cdot T \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{T \cdot Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$	$a^n \cdot \sin(b \cdot n) \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1-aZ^{-1} \cdot \sin(b)}{1-2aZ^{-1} \cdot \cos(b)+a^2 \cdot Z^{-2}}$
$(nT)^2 \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{T^2 \cdot Z^{-1} (1+Z^{-1})}{(1-Z^{-1})^3}$	$n^2 \cdot a^n \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{aZ^{-1}(1+aZ^{-1})}{(1-aZ^{-1})^3}$
$n \cdot a^n \cdot u[nT]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{aZ^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2}$			

### 7.2.2 Rechenregeln

#### ➤ Linearität

$$a \cdot x[nT] + b \cdot y[nT] \longleftrightarrow a \cdot X(Z) + b \cdot Y(Z)$$

#### ➤ Zeitverschiebung / Verzögerung

$$x[(n-m)T] \longleftrightarrow z^{-m} \cdot X(Z) \quad ; m \geq 0$$

#### ➤ Z – Skalierung

$$a^n \cdot x[nT] \longleftrightarrow X\left(\frac{Z}{a}\right)$$

#### ➤ Differenziation

$$x[nT] - x[(n-1)T] \longleftrightarrow (1-Z^{-1}) \cdot X(Z)$$

#### ➤ Summation

$$\sum_{i=0}^n x[iT] \longleftrightarrow \frac{X(Z)}{1-Z^{-1}}$$

#### ➤ Multiplikation mit $(nT)^k$

$$(nT)^k \cdot x[nT] \longleftrightarrow -Z \cdot T \cdot \frac{d\left[\frac{X(Z)}{Z}\right]}{dZ}$$

### 7.2.3 Grenzwertsätze

Anfangswertsatz  $X[0] = \lim_{Z \rightarrow \infty} X(Z)$

Endwertsatz  $X[\infty] = \lim_{Z \rightarrow 1} (1-Z^{-1}) \cdot X(Z)$  Voraussetzung: Pole von  $(1-Z^{-1}) \cdot X(Z)$  müssen im Einheitskreis liegen

## 7.3 Lösung linearer Differenzgleichungen mit der Z – Transformation

### 7.3.1 Allgemein

$$y[nT] + a_1 \cdot y[(n-1)T] + \dots + a_k \cdot y[(n-k)T] = b_0 \cdot x[nT] + b_1 \cdot x[(n-1)T] + \dots + b_L \cdot x[(n-L)T]$$

$$Y(Z) \cdot (1 + a_1 \cdot Z^{-1} + \dots + a_k \cdot Z^{-k}) = X(Z) \cdot (b_0 + b_1 \cdot Z^{-1} + \dots + b_L \cdot Z^{-L})$$

$$Y(Z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot Z^{-1} + \dots + b_L \cdot Z^{-L}}{1 + a_1 \cdot Z^{-1} + \dots + a_k \cdot Z^{-k}} \cdot X(Z) \quad \left| \cdot \frac{Z^k}{Z^k} \text{ hiernach PBZ, } \frac{Y(Z)}{Z} \rightarrow Y(Z), \text{ dann Rücktransformation} \right.$$

Anmerkung: Dies ist auch Anwendbar, wenn  $y[nT] \neq 0$  für  $n < 0$  (Anfangsbedingung  $\neq 0$ ), dazu muss anders Transformiert werden:

$$y[nT] \longleftrightarrow Y(Z) \quad y[(n-1)T] \longleftrightarrow Y(Z) \cdot Z^{-1} + Y[-T] \quad y[(n-2)T] \longleftrightarrow Y(Z) \cdot Z^{-2} + Y[-T] \cdot Z^{-1} + Y[-2T]$$

## 8. Allgemeine Zusammenhänge

### 8.1 Wandlung von Signalen in den Frequenzbereich (Fourier – Transformation)

Zeitbereich	→	Frequenzbereich
aperiodisches CT – Signal	→	aperiodisches, kontinuierliches Spektrum
periodisches CT – Signal	→	aperiodisches Linienspektrum (Dirac)
aperiodisches DT – Signal	→	periodisches kontinuierliches Spektrum
periodisches DT - Signal	→	periodisches Linienspektrum (Dirac)

### 8.2 Mathematische Grundlagen

$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{jx} + e^{-jx})$	$\sin(x) = \frac{1}{j \cdot 2} \cdot (e^{jx} - e^{-jx})$	$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot x))$	$\sin^2(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot x))$
$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$	$e^{j\pi/2} = j \quad e^{-j\pi/2} = -j$	$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$	$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$	
$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$		$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	

9. Sonstiges

9.1 DF1 – DF2

9.1.1 Prinzipielle Herangehensweise

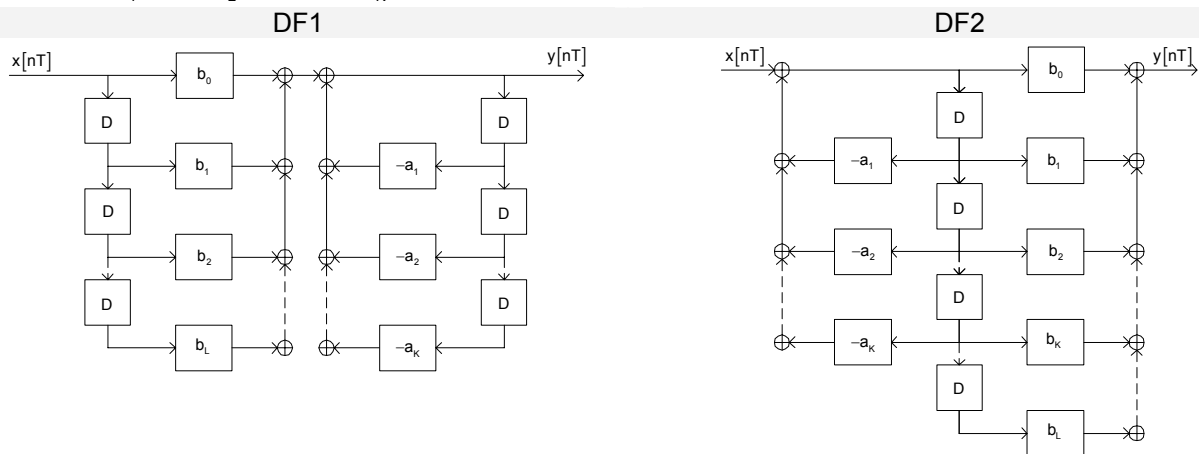
$$y[nT] = \sum_{i=1}^K (-a_i) \cdot y[(n-i)T] + \sum_{k=0}^L x[(n-k)T]$$

$$y[nT] = -a_1 \cdot y[(n-1)T] - a_2 \cdot y[(n-2)T] - \dots - a_k \cdot y[(n-k)T] + b_0 \cdot x[nT] + b_1 \cdot x[(n-1)T] + b_2 \cdot x[(n-2)T] + \dots + b_L \cdot x[(n-L)T]$$

Zugehörige Übertragungsfunktion

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot Z^{-1} + b_2 \cdot Z^{-2} + \dots + b_L \cdot Z^{-L}}{1 + a_1 \cdot Z^{-1} + b_2 \cdot Z^{-2} + \dots + b_K \cdot Z^{-K}}$$

Vorsicht immer auf  $a_0$  normieren!



9.2 Bilineare Transformation

9.2.1 Prinzipielle Herangehensweise

Ziel: Approximation eines gewünschten Frequenzgangs

gegeben ist  $H_a(s)$

gesucht ist  $H(Z)$

dafür definiert man  $H(Z) = H_a(s) \Big|_{s = C \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$

mit C als frei wählbarer Konstanten

wir setzen  $C = 2\pi \cdot f_1 \cdot \tan^{-1}(\pi \cdot f_2 \cdot T)$

mit:  $f_1$  : Frequenz des CT – Signals  
und  $f_2$  : Frequenz des DT – Signals

9.3 Entwurf von IIR – Systemen

9.3.1 Prinzipielle Herangehensweise

Ziel: Approximation einer gewünschten CT – Systemantwort im Zeitbereich

Vorsicht! Hier nur für Impulsinvarianten Entwurf

gegeben ist  $H_a(s)$

gesucht ist  $H_r(Z)$

1 Laplace – Rücktransformation von  $H_a(s) \rightarrow h_a(t)$

2 Abtasten von  $h_a(t) : t \rightarrow nT \Rightarrow h_a[nT]$

3  $h_a[nT]$  Z – Transformieren ergibt  $H_a(Z)$

4 In die Formel  $H_b(Z) = T \cdot H_a(Z)$

Impulsinvarianten Entwurf